

# Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

Teil 1:

Qualitativer Basiskurs

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Photonen</b>	<b>1</b>
1.1	Der Photoeffekt: Licht löst Elektronen aus Metalloberflächen . . . . .	1
1.2	Deutung des Photoeffekts mit Photonen . . . . .	2
1.3	Experimentelle Überprüfung der Energiebilanz und Bestimmung der Planckschen Konstanten . . . . .	3
1.4	Impuls von Photonen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Präparation dynamischer Eigenschaften</b>	<b>7</b>
2.1	Prismenversuch mit Licht . . . . .	7
2.2	Halbdurchlässiger Spiegel (Strahlteiler) . . . . .	9
2.3	Polarisation . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Wellen und Teilchen</b>	<b>13</b>
3.1	Licht im Interferometer . . . . .	13
3.2	Vom Lichtstrahl zu einzelnen Photonen . . . . .	14
3.3	Interferometrie mit einzelnen Photonen . . . . .	15
3.4	Kann man einem Photon einen Weg zuschreiben? . . . . .	17
3.5	Anschauliche Erklärung des Ergebnisses . . . . .	19
3.6	Teilt sich das Photon? . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Die statistischen Aussagen der Quantentheorie</b>	<b>22</b>
4.1	Doppelspaltexperiment mit einzelnen Photonen . . . . .	22
4.2	Das Doppelspaltexperiment mit einzelnen Photonen und die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Quantentheorie . . . . .	24
4.3	Präparation und Wahrscheinlichkeitsaussagen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Elektronen als Quantenobjekte</b>	<b>27</b>
5.1	Elektronenbeugung . . . . .	27
5.2	Doppelspaltexperiment mit Elektronen und Atomen . . . . .	28
5.3	Die Wellenlänge von Elektronen . . . . .	30

5.4	Doppelspaltexperiment mit klassischen Teilchen und mit Elektronen . . . . .	32
5.5	Wahrscheinlichkeitsinterpretation und Wellenfunktion . . . . .	34
5.6	Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Doppelspalt-Experiment . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Eigenschaften von Elektronen und der quantenmechanische Messprozess</b>	<b>39</b>
6.1	Die Eigenschaft „Ort“ im Doppelspaltexperiment . . . . .	39
6.2	Messprozess und Komplementarität . . . . .	41
6.3	Messungen und Eigenschaften . . . . .	42
6.4	Zustandsreduktion . . . . .	44
6.5	Schrödingers Katze, Messprozess und Dekohärenz . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation</b>	<b>49</b>
7.1	Gleichzeitige Präparation verschiedener Eigenschaften . . . . .	49
7.2	Präparation von Ort und Impuls bei Photonen . . . . .	50
7.3	Ein Maß für die „Güte“ einer Präparation . . . . .	51
7.4	Messverfahren und Eigenschaften . . . . .	52
7.5	Elektronen am Einzelspalt und die quantitative Formulierung der Unbestimmtheitsrelation	54
7.6	Unbestimmtheitsrelation und Bahnbegriff . . . . .	57
<b>8</b>	<b>Der Weg zur Schrödinger-Gleichung</b>	<b>60</b>
8.1	Mathematische Beschreibung von Quantenobjekten . . . . .	60
8.2	Präparation von Elektronen auf bestimmte kinetische Energie . . . . .	61
8.3	Wellenfunktion eines freien Elektrons . . . . .	62
8.4	Operatoren für physikalische Größen . . . . .	62
8.5	Der Operator der kinetischen Energie . . . . .	64
8.6	Eigenwertgleichung . . . . .	67
8.7	Operator der Gesamtenergie . . . . .	68
8.8	Die Grundgleichung der Quantenmechanik . . . . .	71
8.9	Das Auffinden stationärer Zustände mit der Schrödinger-Gleichung . . . . .	72
8.10	Elektronen im Potentialtopf . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Atome</b>	<b>78</b>
9.1	Was sind Atome? . . . . .	78
9.2	Linienspektren . . . . .	78
9.3	Das Bohrsche Atommodell . . . . .	80
9.4	Abschied vom Bohrschen Atommodell . . . . .	82
9.5	Quantisierung der Energie im Franck-Hertz-Versuch . . . . .	83
9.6	Dreidimensionaler Potentialtopf und Orbitale . . . . .	84

9.7 Das Wasserstoff-Atom . . . . . 88

# Kapitel 1

## Photonen

### 1.1 Der Photoeffekt: Licht löst Elektronen aus Metalloberflächen

Viele optische Experimente sprechen dafür, dass es sich beim Licht um eine elektromagnetische Welle handelt. Experimente wie die Beugung am Gitter, am Einzel- und am Doppelspalt lassen sich als Interferenzerscheinungen erklären, und Interferenz ist ein typisches Merkmal einer Welle. Wegen der vielen Bestätigungen, die die Wellentheorie des Lichts in der Optik erfahren hat, scheinen sich Zweifel an ihrer universellen Gültigkeit fast von selbst zu verbieten. Dennoch gibt es Phänomene, die sich der Erklärung durch die Wellentheorie widersetzen:

**Experiment 1.1 (Hallwachs-Effekt):** Eine frisch geschmirgelte Zinkplatte wird nach Abb. 1.1 auf ein Elektroskop gesteckt und durch einen kurzen Kontakt mit dem Minuspol einer Hochspannungsquelle negativ aufgeladen. Danach wird die Platte mit dem Licht aus einer Quecksilberdampfampe bestrahlt, das einen hohen Anteil an ultraviolettem Licht enthält. Die Platte entlädt sich rasch (der Elektroskopausschlag geht auf Null zurück). Dagegen entlädt sich das Elektroskop nicht, wenn man eine Glasplatte in den Strahlengang bringt.

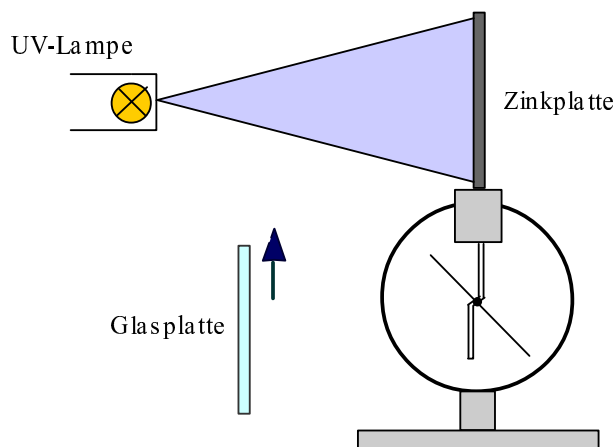


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau zum Hallwachs-Effekt (Experiment 1.1)

Eine mögliche Erklärung für den Ausgang dieses Versuches besteht darin, dass Elektronen das Metall verlassen, wenn man es mit Licht bestrahlt. Das Licht scheint Elektronen aus der Zinkplatte „herauszuschlagen“ (Abb. 1.2). Dies erklärt den Abbau des Elektronenüberschusses auf der negativ geladenen

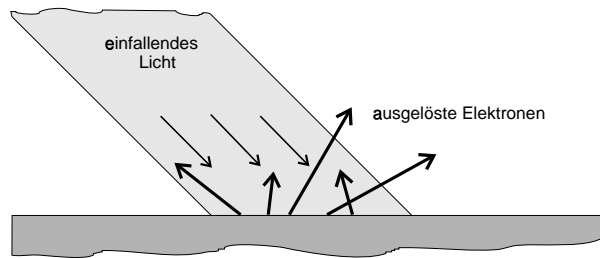


Abbildung 1.2: Licht löst Elektronen aus Metalloberflächen

Platte und damit die Entladung des Elektroskops. Allerdings kann nur UV-Licht den Effekt auslösen, wie das Einführen der Glasplatte zeigt. Es wird von der Glasplatte absorbiert, woraufhin die Entladung nicht stattfindet. Sichtbares Licht kann dagegen die Glasplatte fast ungehindert passieren. Die Auslösung von Elektronen aus einer Metalloberfläche durch Licht wird als äußerer **Photoeffekt** bezeichnet.

Kann man den Effekt mit der Wellentheorie des Lichts erklären? Nach der Wellentheorie werden die Elektronen von der einfallenden Lichtwelle zu Schwingungen angeregt. Bei größerer Lichtintensität ist auch die elektrische Feldstärke größer. Dann sollten die Elektronen mit größerer Amplitude schwingen, so dass sie leichter aus dem Metall abgelöst würden.

Dies steht aber im Widerspruch zu den Beobachtungen: Bei der Bestrahlung mit sichtbarem Licht werden *keine* Elektronen ausgelöst, selbst wenn man die Intensität sehr stark erhöht. Nur hochfrequentes UV-Licht ist in der Lage, Elektronen auszulösen (und zwar selbst bei sehr niedriger Intensität). Die Wellentheorie des Lichts gerät hier in Erklärungsschwierigkeiten.

## 1.2 Deutung des Photoeffekts mit Photonen

Um den Photoeffekt zu erklären, benötigt man eine *neuartige Modellvorstellung* von der Natur des Lichts. In dem neuen Modell strömt Licht nicht als kontinuierliche elektromagnetische Energie von der Lichtquelle weg, sondern als eine Vielzahl von **Energieportionen**, vergleichbar einem *Strom von Teilchen*. Diese Energieportionen nennt man Lichtquanten oder **Photonen**. Der Photoeffekt wird in diesem Modell als „Stoß“ zwischen Photonen und Elektronen gedeutet. Ein Elektron wird aus dem Metall herausgeschlagen, wenn es von einem Photon getroffen wird und dessen gesamte Energie übernimmt.

Welche Eigenschaften besitzen diese Lichtquanten? Beim Photoeffekt ist ihr hervorstechendstes Merkmal die Energie, die sie an das Elektron übertragen. Experimentell hat sich gezeigt, dass die Fähigkeit, Elektronen auszulösen (also Energie zu übertragen) um so größer ist, je größer die Frequenz  $f$  des eingestrahlt Lichts ist. Es ist also zu vermuten, dass die Energie der Photonen mit der Frequenz wächst. Wir stellen die Hypothese auf, dass die Energie eines Photons proportional zu  $f$  ist:  $E \sim f$ . Bezeichnet man die Proportionalitätskonstante mit  $h$ , erhält man die Beziehung

$$E = hf. \tag{1.1}$$

Der Photoeffekt wird dann folgendermaßen mit Hilfe der Photonenvorstellung gedeutet:

**Beim Photoeffekt treffen Photonen auf eine Metalloberfläche. Wenn ein Photon auf ein Elektron trifft, wird das Photon absorbiert. Die Energie  $hf$  des Photons wird auf das Elektron übertragen; mit der gewonnenen Energie kann das Elektron das Metall verlassen.**

Das an der Metalloberfläche austretende Elektron hat allerdings eine etwas kleinere kinetische Energie als  $hf$ . Denn um die Metalloberfläche von innen nach aussen zu überwinden, muss das Elektron eine für das jeweilige Metall charakteristische Arbeit leisten, die man **Austrittsarbeit**  $W_A$  nennt. Zusätzlich können die Elektronen bereits im Innern des Metalls durch Stöße Energieverluste erleiden.

Die Energiebilanz sieht dann folgendermaßen aus: Vor dem Prozess besitzt das Photon die Energie  $hf$ . Nach dem Verlassen des Metalls hat das Elektron die Austrittsarbeit  $W_A$  geleistet und durch Stöße die Energie  $W_S$  abgegeben. Es gilt also die Bilanzgleichung:

$$hf = E_{\text{kin}} + W_A + W_S. \quad (1.2)$$

Da die Energie  $W_S$  für jedes ausgelöste Elektron unterschiedlich ist, erhält man auch verschiedene Werte der kinetischen Energie. Der maximal mögliche Wert  $E_{\text{kin,max}}$  der kinetischen Energie tritt auf, wenn  $W_S = 0$  ist. Für ihn gilt demnach

$$E_{\text{kin,max}} = hf - W_A. \quad (1.3)$$

Dieser Maximalwert von  $E_{\text{kin}}$  lässt sich im Experiment ermitteln. Damit ist auch die Hypothese, dass die Energie eines Photons der Frequenz proportional ist, einem experimentellen Test zugänglich.

### 1.3 Experimentelle Überprüfung der Energiebilanz und Bestimmung der Planckschen Konstanten

Um die Energiebilanz (1.3) experimentell zu prüfen, muss ein Messverfahren gefunden werden, mit dem die kinetische Energie der Elektronen für verschiedene Photonen-Energien  $hf$  bestimmt werden kann.

**Experiment 1.2:** In einer evakuierten Röhre befinden sich zwei Elektroden (Abb. 1.3). Auf die Kathode ist eine metallische Schicht (z. B. Kalium) aufgedampft. Die Anode besteht aus einem Metallring und dient als Auffangelektrode für die ausgelösten Elektronen. Man nennt

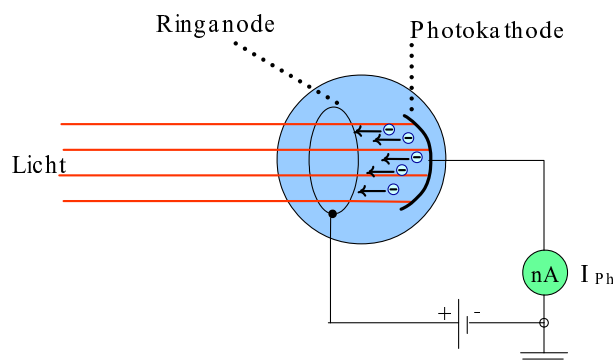


Abbildung 1.3: Nachweis des Photostroms mit einer Photozelle

eine solche Röhre eine Photozelle; die Metallschicht auf der Kathode wird auch als Photoschicht bezeichnet. Wird die Photoschicht von außen mit Licht bestrahlt, so zeigt das über einen Messverstärker angeschlossene Amperemeter einen Strom  $I_{Ph}$ , den Photostrom, an.

Im Unterschied zu Experiment 1.1 wurde hier ein Metall verwendet, bei dem der Photoeffekt auch mit sichtbarem Licht auftritt. Das bedeutet, dass schon bei sichtbarem Licht Elektronen aus dem Metall austreten können. Die ausgelösten Elektronen werden zur Anode hingezogen. In der Photoschicht entsteht durch die fehlenden Elektronen ein Ladungsdefizit. Es wird dadurch ausgeglichen, dass über das Amperemeter Elektronen nachfließen. Diese Elektronenverschiebung wird als Photostrom  $I_{Ph}$  registriert.

Die Bestimmung der kinetischen Energie der Elektronen gelingt mit der sogenannten *Gegenfeldmethode*. Dabei werden die Elektronen auf dem Weg zur Anode durch eine Gegenspannung  $U_g$  abgebremst. Der Photostrom wird Null, wenn die Gegenspannung gerade so weit erhöht wird, dass auch die schnellsten Elektronen die Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode nicht mehr überwinden können. Für die Energie der schnellsten Elektronen gilt dann  $E_{kin,max} = eU_g$ . Damit lässt sich die maximale Elektronenenergie über die angelegte Gegenspannung bestimmen.

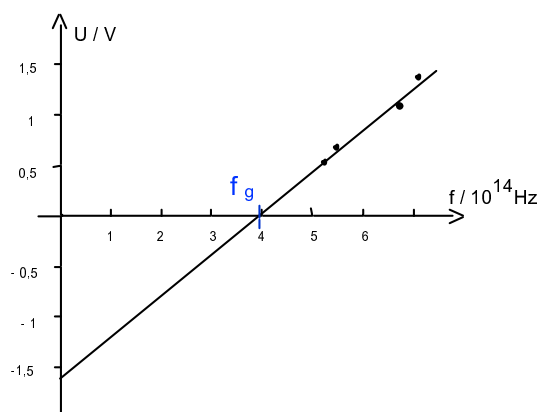


Abbildung 1.4: Gemessene Gegenspannungen für verschiedene Frequenzen

**Experiment 1.3:** Die Kathode der Photozelle wird mit einer Quecksilberdampfampe beleuchtet. Um monochromatisches Licht zu erhalten, werden Interferenzfilter oder ein Geradsichtprisma benutzt.<sup>1</sup> Für die verschiedenen Lichtfrequenzen werden die Gegenspannungen  $U_g$  bestimmt, bei denen der Photostrom verschwindet und die Messwerte in ein  $eU_g$ - $f$ -Diagramm übertragen.

Da der Photostrom nur sehr allmählich abfällt, ist es schwierig, den Nullpunkt exakt festzulegen. Man stellt fest, dass die für verschiedene Frequenzen des auffallenden Lichts gemessenen Werte für die Gegenspannung auf einer Geraden liegen (Abb. 1.4). Dies stimmt mit Gleichung (1.3) überein, die umgeformt die Gestalt der Geradengleichung

$$eU_g = hf - W_A \quad (1.4)$$

besitzt. Die dieser Gleichung zugrundeliegende Hypothese, dass die Photonenenergie proportional zur Frequenz ist, findet damit ihre Bestätigung. Aus dem Vergleich der Geradengleichung mit den gemessenen Daten kann man die Werte der Konstanten  $h$  und  $W_A$  ablesen. Die Steigung der Geraden bestimmt die Proportionalitätskonstante  $h$  zwischen Photonenenergie und Frequenz. Aus präzisen Messungen

<sup>1</sup>Man nutzt dabei aus, dass im Licht der Quecksilberdampfampe nicht alle Frequenzen enthalten sind, sondern nur ganz bestimmte. Auf diese sogenannten *Spektrallinien* wird im Zusammenhang mit dem Aufbau der Atome noch ausführlich eingegangen.



ergibt sich der Wert von  $h$  zu  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js. Die fundamentale Naturkonstante  $h$  wird als *Plancksches Wirkungsquantum* bezeichnet. Sie ist eine kennzeichnende Größe für das Auftreten von Quanteneffekten.

Die gemessene Gerade schneidet die  $f$ -Achse bei der sogenannten *Grenzfrequenz*  $f_{gr}$ . Für sie ist die kinetische Energie  $E_{kin,max} = eU_g$  der ausgelösten Elektronen Null. Die Photonenenergie reicht dann gerade aus, um die Austrittsarbeit aufzubringen. Licht mit einer Frequenz  $f < f_{gr}$  kann keine Elektronen aus dem betreffenden Metall auslösen. Die Austrittsarbeit  $W_A$  erhält man nach Gleichung (1.4) durch Extrapolation der Geraden zum Wert  $f = 0$ . Der Schnittpunkt mit der Ordinate liegt bei  $eU_g = -W_A$ . Aus Abb. 1.4 liest man einen Wert von etwa 1,7 eV ab. Benutzt man Photozellen, bei denen andere Metalle als Kalium auf die Kathode aufgedampft sind, ergeben sich Geraden mit der gleichen Steigung wie in Abb. 1.4, die aber wegen der verschiedenen Austrittsarbeiten andere Achsenschnittpunkte aufweisen.

Mit dem Versuchsaufbau von Experiment 1.3 lassen sich weitere Belege für die Photonentheorie finden:

**Experiment 1.4:** In Experiment 1.3 wird die Intensität des Lichts, das auf die Photoschicht fällt, abgeschwächt. Man beobachtet einen kleineren Photostrom, aber die Gegenspannung  $U_g$  zur Abbremsung der schnellsten Photoelektronen bleibt gleich.

Experiment 1.4 zeigt, dass die kinetische Energie der Photoelektronen nur von der Frequenz und nicht von der Intensität des Lichts abhängt. Nach der Photonentheorie ist das einsichtig, denn die Frequenz bestimmt die Photonenenergie. Nach der klassischen Wellentheorie hingegen sollte Licht höherer Intensität mehr Energie auf die Elektronen übertragen, weshalb die kinetische Energie der Photoelektronen mit der Intensität zunehmen sollte. Das Versuchsergebnis deutet also darauf hin, dass beim Photoeffekt die Energie in einem quantenhaften Einzelprozess auf die Elektronen übertragen wird.

## 1.4 Impuls von Photonen

Die erfolgreiche Interpretation des Photoeffekts mit Hilfe des Photonenbegriffs legt eine Teilchentheorie des Lichts nahe. Dafür spricht auch ein weiterer experimenteller Befund: Die Photonen besitzen einen *Impuls*, den sie auf materielle Teilchen übertragen können. Das zeigt sich z. B. im Phänomen des Staubschweifis von Kometen. Er ist immer von der Sonne weggerichtet, weil die Photonen des Sonnenlichts einen Impuls auf die Staubteilchen übertragen. Der direkte Nachweis des Impulsübertrags von Photonen auf Atome gelang 1933, als Otto Frisch einen Strahl aus Natriumatomen zur Seite ablenken konnte, indem er die Atome mit dem Licht einer Natriumdampfampe bestrahlte. Heutzutage gehört das Abbremsen oder Beschleunigen von Atomen durch Laserlicht zur Routine in den Physiklabors.

Der Impuls, den Strahlung auf Materie überträgt, ist mit der Strahlungsenergie  $E$  über die Gleichung  $p = E/c$  verknüpft. Man kann diese Gleichung experimentell bestätigen; sie lässt sich aber auch theoretisch aus der Relativitätstheorie herleiten. Mit ihr kann man den Impuls bestimmen, den ein einzelnes Photon besitzt. Wir wissen bereits, dass ein Photon mit der Frequenz  $f$  die Energie  $E = h \cdot f$  besitzt. Damit erhält man

$$p = \frac{h \cdot f}{c}. \quad (1.5)$$

Wir können unsere Ergebnisse zu Energie und Impuls von Photonen folgendermaßen zusammenfassen.

**Ein Photon der Frequenz  $f$  besitzt eine Energie  $E = h \cdot f$  und einen Impuls  $p = h \cdot f/c$ .**

So sehr die quantenhafte Übertragung von Energie und die Existenz des Photonenimpulses auf ein Teilchenmodell des Lichts hindeuten: Wie sind dann die zahlreichen Befunde zur Interferenz des Lichts einzuordnen, die stark auf eine Wellentheorie hindeuten? Sie lassen sich nicht ohne weiteres mit einer Teilchenvorstellung erklären. Man stellt sich zu Recht die Frage, was das Licht denn nun eigentlich ist: Welle, Teilchen, oder etwas ganz anderes? Wellen- und Teilchenvorstellung sind so verschieden, dass man sich nicht vorstellen kann, dass beide gleichzeitig zutreffen.

An dieser Stelle zeigt sich zum ersten mal, dass die begrifflichen Grundlagen der Quantenmechanik weitaus komplexer sind als die der klassischen Physik. Eine eindeutige Antwort auf die Frage „Welle oder Teilchen?“ ist in der Quantenphysik nicht möglich. Quantenobjekte sind komplizierter. Sie lassen sich in der Regel nicht auf eine der beiden Alternativen festlegen.

Ob sich bei einem Photon Wellen- oder Teilchenaspekte zeigen, hängt von den genauen Versuchsumständen ab, unter denen es beobachtet wird. In einem der folgenden Abschnitte wird sich zeigen, dass mitunter sehr kleine Veränderungen an der Versuchsanordnung ausreichen, um vom Wellen- zum Teilchencharakter „umzuschalten“. Die „Entscheidung“, wie sich ein Photon in einer bestimmten experimentellen Situation verhält, bleibt jedoch nicht dem Zufall überlassen. Mit der Quantenmechanik lässt sich das Verhalten von Photonen und anderen Quantenobjekten vorhersagen und beschreiben. In allen Experimenten, die bisher an Quantenobjekten durchgeführt wurden, hat sich Übereinstimmung zwischen Experiment und theoretischer Beschreibung ergeben.

Allerdings ist die Quantenmechanik keine anschauliche Theorie. Die korrekte Beschreibung des oftmals seltsam anmutenden Verhaltens der Quantenobjekte wird mit einer gewissen Abstraktheit erkaufte. Um sich trotzdem in der Quantenwelt zurechtzufinden, ist es nützlich, zuerst einige begriffliche Grundlagen zu klären, die das Verständnis der Gesetzmäßigkeiten im Quantenbereich erleichtern. Dies wird im nächsten Abschnitt unternommen, wo der Begriff der „dynamischen Eigenschaft“ von Quantenobjekten eingeführt wird.