

## Kapitel 5

# Elektronen als Quantenobjekte

### 5.1 Elektronenbeugung

In den vorausgegangenen Kapiteln wurde deutlich, dass die traditionelle Vorstellung vom Licht als einer Welle nicht ausreicht, um alle beobachteten Phänomene vollständig zu beschreiben. Es zeigte sich, dass man sowohl das Wellen- als auch das Teilchenmodell zur Beschreibung des Lichts benötigt und dass keines von beiden allein ausreicht, um sein Verhalten vollständig zu beschreiben.

Man kann sich fragen, ob die Natur so symmetrisch aufgebaut ist, dass sich Wellenphänomene auch bei Objekten nachweisen lassen, denen man üblicherweise Teilchencharakter zuschreibt. Im atomaren Bereich wären das Atome und ihre Bestandteile wie Elektronen, Protonen und Neutronen. Der Gedanke einer **Wellennatur der Materie** geht auf Louis de Broglie (1923) zurück. Er ist eine theoretische Vermutung, deren Konsequenzen sich im Experiment bewähren müssen.

Ein Beleg für Welleneigenschaften von Elektronen wäre der Nachweis von **Beugungs- oder Interferenzphänomenen** – den typischen Anzeichen eines Wellenphänomens. Im Fall der Röntgenstrahlung lassen sich Welleneigenschaften durch Beugung an den Netzebenen in einem Kristall aufzeigen. Ein ganz analoges Vorgehen ist auch bei Elektronen möglich, wie der folgende Versuch zeigt:

**Experiment 5.1 (Elektronenbeugung):** In einer Elektronenröhre (Abb 5.1 (a)) emittiert die mit 6 V geheizte Kathode Elektronen. Diese durchlaufen eine Beschleunigungsspannung  $U_B = 5$  kV. Sie werden von den nacheinander angeordneten Elektroden  $K_1$ ,  $K_2$  und  $A_1$  zu einem Elektronenstrahl gebündelt. In der durchbohrten Anode  $A_2$  durchquert der Strahl eine dünne Folie aus polykristallinem Graphit. Auf dem Leuchtschirm erkennt man mehrere helle Ringe um

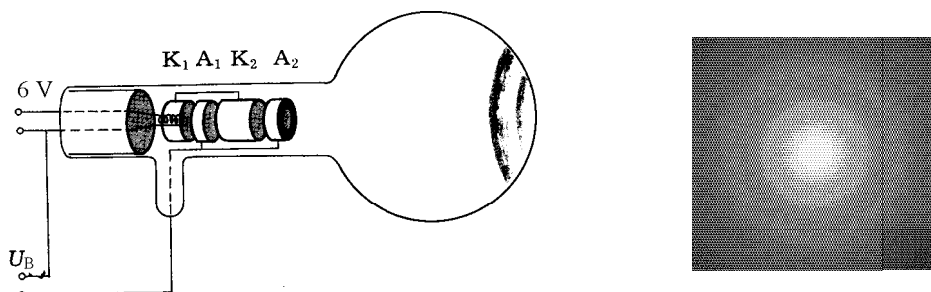


Abbildung 5.1: (a) Elektronenbeugungsröhre, (b) Beugungsmuster auf dem Leuchtschirm

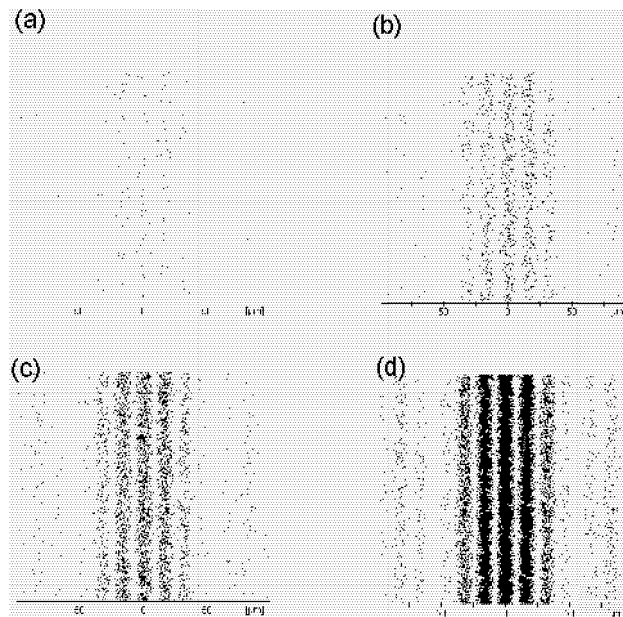


Abbildung 5.2: Aufbau des Interferenzmusters beim Doppelspalt-Experiment

den zentralen Fleck in der Mitte (Abb. 5.1 (b)). Vergrößerung von  $U_B$  bewirkt eine Verkleinerung der Radien.

Die hellen Ringe werden durch **Elektronenbeugung** verursacht. Wie bei der Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlen werden die Elektronen am Kristallgitter des Graphits gebeugt. Dieses Beugungsphänomen ist ein starker Hinweis darauf, dass die Elektronen neben ihrem wohlbekannten Teilchenverhalten auch Wellenverhalten zeigen.

Nach unseren Erfahrungen mit Photonen ist zu vermuten, dass es auch bei Elektronen nicht ausreicht, die Beschreibung auf ein einfaches Teilchen- oder Wellenmodell zu beschränken. Es ist zu vermuten, dass das Verhalten der Elektronen komplexer ist. Dem soll in den folgenden Abschnitten nachgegangen werden.

## 5.2 Doppelspaltexperiment mit Elektronen und Atomen

Im Fall der Photonen konnten wir Interferenzphänomene am Doppelspalt nachweisen. Ein analoges Experiment lässt sich auch mit Elektronen durchführen. Um das Prinzip zu veranschaulichen, benutzen wir wieder das Simulationsprogramm zum Doppelspalt-Experiment.

**Experiment 5.2 (Computersimulation):** Starten Sie das Simulationsprogramm zum Doppelspalt-Experiment. Wählen Sie Elektronen mit einer Energie von 50 keV, eine Spaltbreite von  $0,3 \mu\text{m}$  und einen Spaltabstand von  $1 \mu\text{m}$ . Schalten Sie die Quelle ein. Die ersten nachgewiesenen Elektronen hinterlassen einzelne punktförmige Flecke an scheinbar zufälligen Stellen auf dem Schirm. Je mehr Elektronen nachgewiesen werden, desto deutlicher setzen sich die punktförmigen Flecken zu dem bekannten Doppelspalt-Interferenzmuster zusammen (Abb. 5.2 (a) – (d)).

Das Verhalten der Elektronen im Doppelspalt-Experiment ist völlig analog zu dem von Photonen (Abschnitt 4.2). Jedes einzelne Elektron verhält sich beim Nachweis wie ein Teilchen. Es überträgt seine

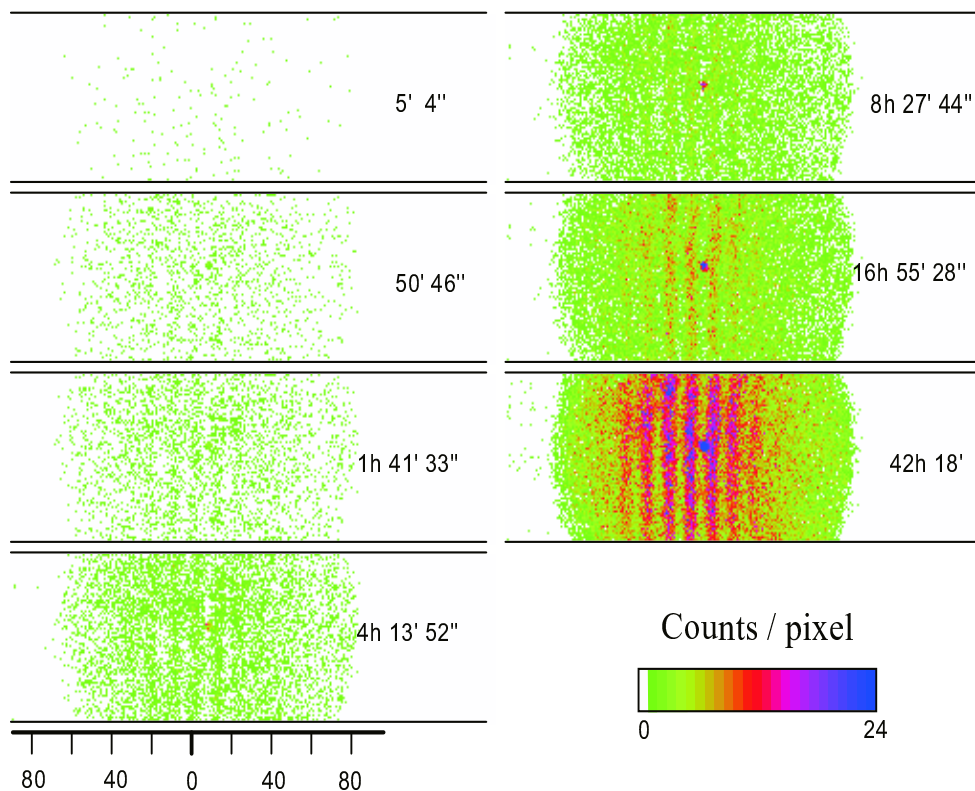


Abbildung 5.3: Aufbau des Interferenzmusters aus einzeln nachgewiesenen Heliumatomen (experimentelle Originaldaten)

gesamte Energie auf eine einzelne Stelle auf dem Schirm. Erst wenn man die Verteilung aus vielen Einzelaufschlägen betrachtet, zeigt sich die charakteristische Wellenerscheinung des Interferenzmusters.

Auch im Fall von Elektronen zeigt sich damit, dass Quantenobjekte weder reines Wellenverhalten noch reines Teilchenverhalten zeigen. Wenn es sich um ein reines Wellenphänomen handelte, müsste das Interferenzmuster von Anfang an auf dem Schirm vollständig erscheinen, wenn auch mit sehr schwacher Intensität. Statt dessen wird ein wohlbestimmter Energiebetrag an eine bestimmte Stelle auf dem Schirm abgegeben, wie es für teilchenhaftes Verhalten charakteristisch ist. Mit teilchenhaftem Verhalten allein ist aber wiederum das Auftreten des Interferenzmusters nur schwer erklärbar.

Die technischen Schwierigkeiten bei der Durchführung eines Doppelspalt-Experiments mit Elektronen sind so groß, dass sie lange Zeit nur als Gedankenexperimente vorstellbar waren. Die Schwierigkeit liegt in der Herstellung von Spalten, deren Breite nur einen halben Mikrometer beträgt. Aus diesem Grund gelang es erst 1961 (an der Universität Tübingen), das Doppelspaltexperiment mit Elektronen durchzuführen. Spaltbreite, Spaltabstand und Elektronenenergie entsprachen dabei den in Experiment 5.2 eingestellten Werten.

Inzwischen konnten Beugungsexperimente auch mit Neutronen, mit ganzen Atomen und sogar mit Molekülen verwirklicht werden. An der Universität Konstanz wurde 1991 ein Doppelspaltexperiment realisiert, bei dem Helium-Atome als Ganzes zur Interferenz gebracht wurden. Dies gelang, indem man sich Techniken aus der Halbleiterherstellung zunutze machte, um aus einer dünnen Goldfolie einen Doppelspalt mit zwei  $1\ \mu\text{m}$  breiten Spalten im Abstand von  $8\ \mu\text{m}$  herzustellen (Abb. 5.4). In dem Experiment wurden die Heliumatome vor dem Doppelspalt durch Elektronenstoß in einen angeregten Zustand gebracht. Dahinter trafen sie auf eine Goldfolie, die als Detektorschirm diente. Sie gaben dort ihre Anre-

gungsenergie ab und wurden elektronisch registriert. Abb. 5.3 zeigt, wie sich nach und nach das Interferenzmuster aus den „Flecken“ einzeln nachgewiesener Heliumatome aufbaut. Das Experiment erstreckte sich über einen Zeitraum von 42 Stunden, so dass trotz der großen Zahl der insgesamt nachgewiesenen Atome jedes Atom einzeln registriert werden konnte.

**Experiment 5.3 (Computersimulation):** Führen Sie eine Computersimulation des Doppelspalt-Experiments mit Helium-Atomen durch. Stellen Sie im Simulationsprogramm die oben angegebenen experimentellen Parameter und eine Energie von 100 meV ein. Vergleichen sie Ihr Ergebnis mit den Originaldaten aus Abb. 5.3. (Im realen Experiment betrug der Abstand zwischen Doppelspalt und Schirm 1,95 m).

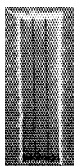


Abbildung 5.4: Bei der Beugung von Helium-Atomen verwendeter Doppelspalt

### 5.3 Die Wellenlänge von Elektronen

Eine grundlegende Größe zur Charakterisierung einer Welle ist die **Wellenlänge**. Wir gehen deshalb nun der Frage nach, welche Wellenlänge man Elektronen zuschreiben kann. Louis de Broglie, auf den die Idee vom Wellenverhalten der Elektronen zurückgeht, konnte auch einen Ausdruck für ihre Wellenlänge angeben. Man erhält ihn durch eine Analogiebetrachtung mit dem Fall von Photonen. Dort gilt die Relation (1.5) zwischen der Frequenz und dem Impuls eines Photons:

$$p = \frac{h \cdot f}{c}. \quad (5.1)$$

Setzt man in diese Gleichung  $\lambda \cdot f = c$  ein, ergibt sich

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (5.2)$$

In der Analogie zwischen Photonen und Elektronen stellte de Broglie die Hypothese auf, dass diese für Photonen abgeleitete Beziehung auch für Elektronen gilt.

**De-Broglie-Beziehung zwischen Wellenlänge und Impuls:**

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad (5.3)$$

Diese Hypothese muss nun experimentell getestet werden. Dies kann mit der schon in Experiment 5.1 benutzten Elektronenbeugungsröhre geschehen. Zunächst stellen wir eine theoretische Erwartung für die Wellenlänge der in Experiment 5.1 verwendeten Elektronen auf. Die Elektronen durchlaufen in der Elektronenstrahlröhre eine Beschleunigungsspannung  $U_B$ . Sie werden dabei auf die kinetische Energie

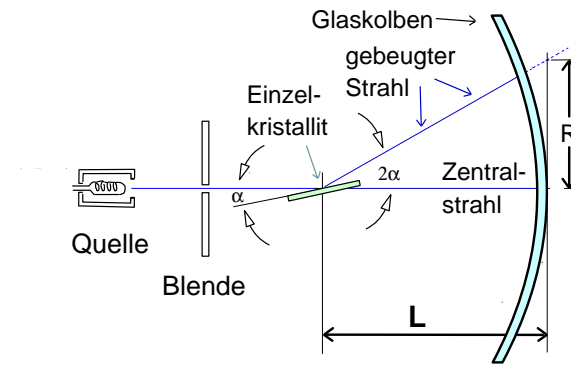


Abbildung 5.6: Geometrie bei der Elektronenbeugung)

$E_{\text{kin}} = eU_B$  präpariert. Alle Elektronen, die von der Graphitfolie gebeugt werden, besitzen diesen Wert der kinetischen Energie.

Mit  $E_{\text{kin}} = p^2/(2m)$  bringen wir die de-Broglie-Beziehung in die Form

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} = \frac{h}{\sqrt{2meU_B}}. \quad (5.4)$$

Mit  $U_B = 5 \text{ kV}$  erhalten wir für die de-Broglie-Wellenlänge den Wert  $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Werten wir nun das Experiment 5.1 quantitativ aus. Man muss dazu wissen, dass der Graphitkristall zwei Netzebenen mit den Abständen  $d = 0,213 \text{ nm}$  und  $d = 0,123 \text{ nm}$  besitzt (Abb. 5.5). In Analogie zur Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlung lautet die Bragg-Bedingung für die beiden hellen Ringe der Ordnung  $n = 1$  für beide Netzebenen:

$$\lambda = 2d \sin \alpha. \quad (5.5)$$

Für den hier vorliegenden Fall kleiner Winkel gilt  $2 \sin \alpha \approx \sin 2\alpha \approx \tan 2\alpha$ . Aus der Geometrie der Anordnung (Abb. 5.6) kann man ablesen:

$$\tan 2\alpha = R/L, \quad (5.6)$$

Abbildung 5.5: Netzebenen im Graphitkristall

wobei  $R$  der Radius der Beugungsringe und  $L$  der Abstand des Kristalls vom Schirm ist (im vorliegenden Experiment ist  $L = 0,135 \text{ m}$ ). Gleichung (5.5) wird also zu

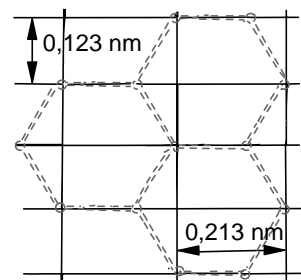
$$\lambda = \frac{d \cdot R}{L} \quad (5.7)$$

Man misst die Radien  $R_1 = 0,011 \text{ m}$  und  $R_2 = 0,019 \text{ m}$ . Für den ersten Ring mit dem Netzebenenabstand  $d_1 = 0,213 \text{ nm}$  ergibt sich also

$$\lambda = \frac{0,213 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,135 \text{ m}} = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (5.8)$$

Für den zweiten Ring mit  $d_2 = 0,123 \text{ nm}$  findet man

$$\lambda = \frac{0,123 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,135 \text{ m}} = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (5.9)$$



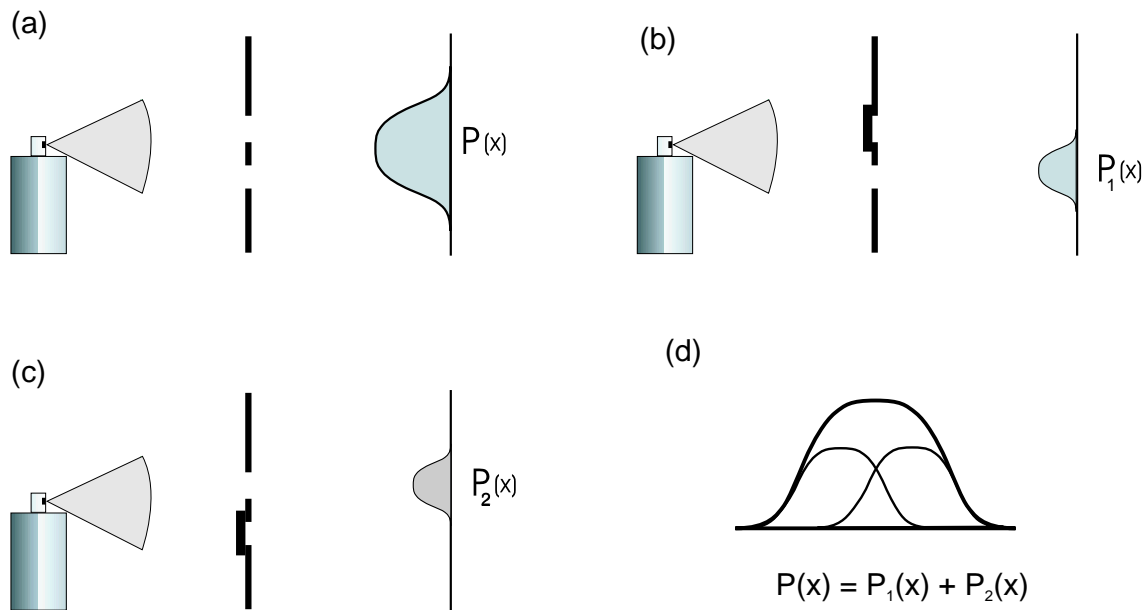


Abbildung 5.7: Doppelspaltversuch mit Farbtropfchen (klassischen Teilchen)

In beiden Fällen stimmt das experimentell erschlossene Ergebnis für  $\lambda$  mit der theoretischen Erwartung nach de Broglies Hypothese überein.

## 5.4 Doppelspaltexperiment mit klassischen Teilchen und mit Elektronen

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten gesehen, wie sich Elektronen im Doppelspalt-Experiment verhalten. Hätte man ähnliche Ergebnisse auch mit klassischen Teilchen erhalten? Ergibt sich mit Fußbällen, die man durch zwei Löcher in einer Mauer schießt, eine vergleichbare Verteilung? Um Elektronen und klassische Teilchen noch einmal deutlich gegeneinander zu stellen, führen wir den Doppelspalt-Versuch mit Farbspray durch. Es besteht aus kleinen Tröpfchen, und wir dürfen erwarten, dass diese sich nach dem klassischen Teilchenmodell verhalten.

**Experiment 5.4 (Experiment oder Simulation):** Schneiden Sie mit einer scharfen Klinge zwei Spalte in ein Blatt Papier oder Pappe. Sprühen Sie mit einer Farbsprühdose kleine Farbtropfchen durch diesen „Doppelspalt“ auf einen dahinterliegenden Papierschirm. Wenn die beiden Spalte nicht zu weit auseinander liegen, werden Sie ein Muster wie in Abb. 5.7 (a) erhalten. Die Intensität der Farbe auf dem Papier ist hinter den Spalten am größten und nimmt nach außen hin kontinuierlich und ohne auffällige Strukturen ab. Wir beschreiben die Verteilung der Farbintensität durch eine Funktion  $P(x)$ .

Der Versuch zeigt, dass sich klassische Farbteilchen anders verhalten als Elektronen. Das von den Elektronen erzeugte Muster (Abb. 5.2) zeigte auffällige Strukturen aus hellen und dunklen Linien, die nicht als geometrischer „Schatten“ des Doppelspalts gedeutet werden konnten.

Es gibt aber auf einer fundamentalen Ebene einen weiteren Unterschied zwischen den von klassischen Teilchen und von Elektronen erzeugten Doppelspalt-Mustern. Er wird in der folgenden Versuchsserie sichtbar:

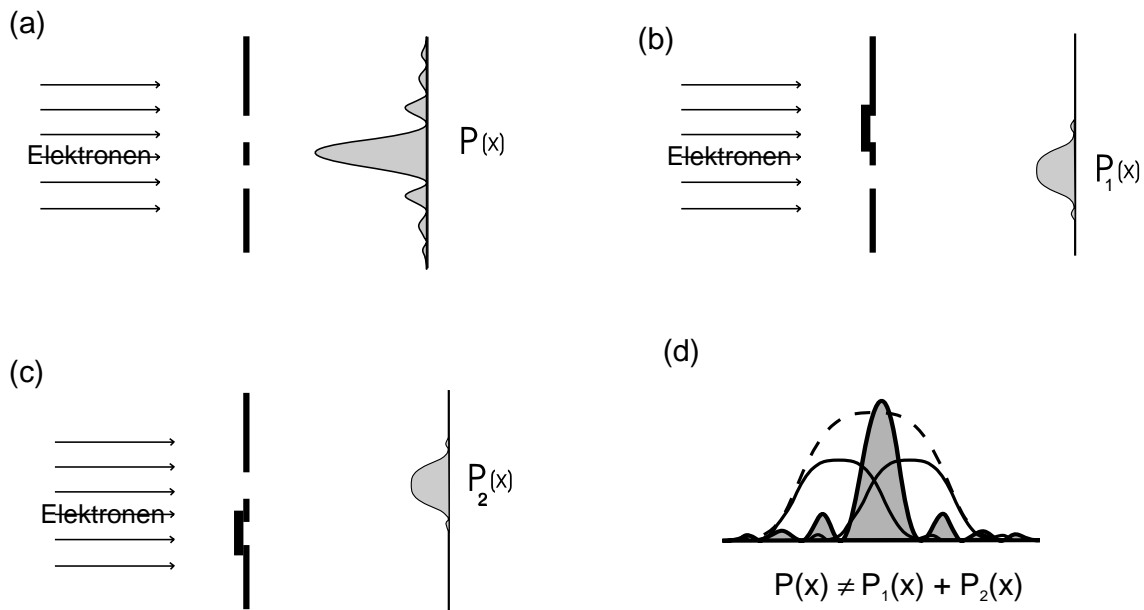


Abbildung 5.8: Doppelspaltversuch mit Elektronen

**Experiment 5.5 (Experiment oder Computersimulation):** In Experiment 5.4 wird Spalt 2 abgedeckt (Abb. 5.7 (b)), so dass nur Farbtröpfchen von Spalt 1 auf das Papier gelangen. Es ergibt sich die Farbintensitätsverteilung  $P_1(x)$ . Danach wird der andere Spalt abgedeckt, so dass nur Farbe von Spalt 2 auf das Papier gelangt. Man erhält so die Verteilung  $P_2(x)$  (Abb. 5.7 (c)).

Für die in den beiden Experimenten gewonnenen Farbintensitätsverteilungen  $P(x)$ ,  $P_1(x)$  und  $P_2(x)$  gilt:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (5.10)$$

Für klassische Teilchen ist die beim Doppelspalt gewonnene Verteilung gleich der *Summe der beiden Einzelspaltverteilungen* (Abb. 5.7 (d)).

Ganz anders verläuft ein entsprechendes Experiment mit Elektronen. Zunächst erinnern wir uns noch einmal an das Doppelspaltexperiment mit zwei geöffneten Spalten, bei dem sich auf dem Schirm das charakteristische Interferenzmuster ergab (Abb. 5.8 (a)). Die Intensitätsverteilung der Elektronen bezeichnen wir wieder mit  $P(x)$ . Nun wird jeweils einer der Spalte abgedeckt:

**Experiment 5.6 (Computersimulation):** Klicken Sie im Simulationsprogramm zum Doppelspaltversuch auf den Schirm und schließen Sie Spalt 2. Nun können die Elektronen nur noch durch Spalt 1. Wenn Sie die Quelle einschalten und warten, bis sich das Schirmbild aufgebaut hat, erhalten Sie eine Elektronenverteilung  $P_1(x)$ , deren Maximum hinter Spalt 1 liegt (Abb. 5.8 (b)).

Nun öffnen Sie Spalt 2 wieder und schließen Spalt 1. Alle Elektronen müssen jetzt durch Spalt 2. Nach Einschalten der Quelle ergibt sich die Verteilung  $P_2(x)$ , deren Maximum hinter Spalt 2 liegt (Abb. 5.8 (c)).

Legt man die beiden Verteilungsmuster übereinander (Abb. 5.8 (d)), ergibt sich eine *andere* Verteilung, als bei zwei gleichzeitig geöffneten Spalten.<sup>1</sup> Für Elektronen gilt

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x). \quad (5.11)$$

Im Gegensatz zu klassischen Teilchen stellt es für Elektronen einen Unterschied dar, ob beide Spalte gleichzeitig offen sind oder ob einer nach dem anderen geöffnet wird.

Eine Besonderheit fällt beim Vergleich von Abb. 5.8 (a) und (c) auf. Bei zwei geöffneten Spalten (Abb. 5.8 (a)) gibt es mehrere Intensitätsminima, an denen fast keine Elektronen nachgewiesen wurden. An diesen Stellen ist die Elektronenintensität *größer*, wenn nur ein Spalt geöffnet ist. Das heisst, dass dort mehr Elektronen nachgewiesen werden, obwohl man die „Zugangsmöglichkeiten“ (die Zahl der Spalte) verringert hat.

Man kann den Unterschied zwischen den Intensitätsverteilungen von Elektronen und klassischen Teilchen, der sich in den Gleichungen (5.10) und (5.11) manifestiert, auch quantitativ erklären. In den nächsten Abschnitten werden wir die dazu nötigen Begriffe erarbeiten.

## 5.5 Wahrscheinlichkeitsinterpretation und Wellenfunktion

Auf den ersten Blick mag das Verhalten von Elektronen, Photonen und anderen Quantenobjekten recht regellos erscheinen. Rufen wir uns noch einmal das Doppelspaltexperiment mit Elektronen ins Gedächtnis: Nach Einschalten der Quelle wurden einzelne Elektronen als „Flecke“ auf dem Schirm nachgewiesen. Niemand konnte vorhersagen, wo das nächste Elektron landen wird.

Ein anderer verwirrender Punkt ist, dass sich Quantenobjekte einmal wie Wellen, ein anderes Mal wie Teilchen zu verhalten scheinen. Auch hier ist die Vorhersage nicht einfach, wann sie welches Verhalten zeigen.

Und doch erlaubt die Quantenmechanik, die Ergebnisse aller an Quantenobjekten durchgeführten Experimente korrekt vorherzusagen. Dabei wird der „naive“ Welle-Teilchen-Dualismus – die unreflektierte Nebeneinanderbenutzung beider Modelle – überwunden. Den Schlüssel dazu liefert eine Erkenntnis, die wir schon in Abschnitt 4.2 im Zusammenhang mit Photonen gewonnen haben: die Tatsache, dass die Quantenmechanik über Einzelereignisse nur **Wahrscheinlichkeitsaussagen** macht.

Ein solches Einzelereignis stellt auch die Registrierung eines Elektrons auf dem Schirm im Doppelspaltexperiment dar. Es lässt sich nicht im voraus sagen, an welchem Ort das nächste Elektron nachgewiesen werden wird. Man kann aber die *Wahrscheinlichkeit* dafür angeben. Im Fall der Photonen hatten wir gesehen, dass wir zwar nicht erraten konnten, wo das nächste Photon nachgewiesen wird. Wenn aber 100 Photonen hinzugefügt wurden, konnten wir mit hoher Zuverlässigkeit angeben, an welchen Stellen viele und an welchen wenige landeten. Wir sind von einer Aussage über ein Einzelereignis zu einer Aussage über Häufigkeiten bzw. zu einer Wahrscheinlichkeitsaussage übergegangen.

Die Intensitätsverteilung der Elektronen wurde in den Versuchen aus dem letzten Abschnitt durch eine Verteilungsfunktion  $P(x)$  charakterisiert, die angab, wie hoch die Intensität an einer bestimmten Stelle  $x$  war. Diese Verteilungsfunktion  $P(x)$  interpretiert man quantenmechanisch als eine **Wahrscheinlichkeitsdichte**.  $P(x) \cdot \Delta V$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Elektron im Raumbereich  $\Delta V$  um den Ort  $x$  herum zu finden.  $P(x)$  hat an Stellen mit hoher Nachweiswahrscheinlichkeit einen großen Wert, an Stellen mit niedriger Wahrscheinlichkeit einen kleinen Wert. An Stellen, wo man niemals ein Elektron findet, ist  $P(x)$  Null.

---

<sup>1</sup>Das Übereinanderlegen der beiden Verteilungen können Sie im Simulationsprogramm dadurch erreichen, dass sie auf den Schirm klicken und in dem Fenster, das daraufhin erscheint, auf den mit „A“ beschrifteten Knopf drücken. Damit wird das automatische Löschen des Schirms nach jeder Änderung der Konfiguration verhindert.



**Für Quantenobjekte kann man eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x)$  angeben, die bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Quantenobjekt bei einer Messung im Volumenelement  $\Delta V$  um den Ort  $x$  gefunden wird.**

Eine derartige Wahrscheinlichkeitsaussage lässt sich natürlich nur überprüfen, indem man eine große Zahl von Experimenten an identisch präparierten einzelnen Elektronen macht. Genau dies wird im Doppelspaltexperiment getan: Sehr viele voneinander unabhängige Elektronen durchlaufen die gleiche Versuchsanordnung und werden nachgewiesen. Eine solche Menge von sehr vielen identisch präparierten und einander nicht beeinflussenden Elektronen wurde in Abschnitt 4.2 als ein **Ensemble** bezeichnet. Der Begriff des Ensembles spielt eine zentrale Rolle, wenn es darum geht, das Verhalten von Quantenobjekten mathematisch – also quantitativ – zu charakterisieren.

Im Experiment entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(x) \cdot \Delta V$  die relative Häufigkeit, mit der man ein Elektron um den Ort  $x$  herum findet. An den Stellen, wo die Wahrscheinlichkeit hoch ist, werden viele Elektronen registriert. Entsprechend werden an Stellen mit niedriger Wahrscheinlichkeit weniger Elektronen gefunden.

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x)$  lassen sich Elektronen und andere Quantenobjekte mathematisch beschreiben. Wenn  $P(x)$  bekannt ist, kann man z. B. die Verteilung der Elektronen auf dem Schirm vorhersagen. Das Ziel quantenmechanischer Berechnungen ist es, die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(x)$  in der jeweils interessierenden physikalischen Situation zu ermitteln.

Es hat sich als vorteilhaft herausgestellt, nicht mit  $P(x)$  selbst zu arbeiten, sondern mit einer Funktion  $\psi(x)$ , die man **Wellenfunktion** nennt. Man erhält  $P(x)$  aus  $\psi(x)$  durch Quadrieren:  $P(x) = |\psi(x)|^2$ .

Die Wellenfunktion ist einem *Ensemble von identisch präparierten Quantenobjekten* zugeordnet. Der zentrale Punkt, der es erlaubt, den Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik zu überwinden, ist nun, dass die Wellenfunktion  $\psi(x)$  sich nach den **Gesetzen der klassischen Wellenlehre** entwickelt. Das bedeutet, dass sich  $\psi(x)$  ähnlich wie eine klassische Wasser-, Schall- oder elektromagnetische Welle ausbreitet, wobei alle typischen Wellenphänomene wie Interferenz oder Beugung auftreten.

Die Interpretation von  $P(x) = |\psi(x)|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte ist eines der zentralen Elemente der Quantenmechanik. Sie wurde von Max Born begründet und ist nach ihm benannt:

**Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation: Quantenobjekte werden durch eine Wellenfunktion  $\psi(x)$  beschrieben. Sie breitet sich nach Wellengesetzen aus. Die Wellenfunktion bestimmt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt im Volumenelement  $\Delta V$  um den Ort  $x$  nachzuweisen:**

$$P(x) \cdot \Delta V = |\psi(x)|^2 \cdot \Delta V. \quad (5.12)$$

Machen wir uns nun anhand des Doppelspaltexperiments klar, welche Konsequenzen die wellenmäßige Ausbreitung von  $\psi(x)$  zusammen mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $|\psi(x)|^2$  hat. In diesem Versuch zeigte sich besonders deutlich, was wir als „Dualismus“ von Wellen- und Teilchenmodell bezeichnet hatten. Die Elektronen wurden auf dem Schirm als „Flecke“ detektiert, zeigten also beim Nachweis teilchenhaftes Verhalten. Andererseits bildete sich aus vielen dieser Flecke das Interferenzmuster heraus, das typisch für Wellenverhalten ist.

Im Licht der Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation haftet diesem Ergebnis nichts Geheimnisvolles mehr an. Die Elektronen werden durch eine Wellenfunktion  $\psi(x)$  beschrieben, die sich nach den

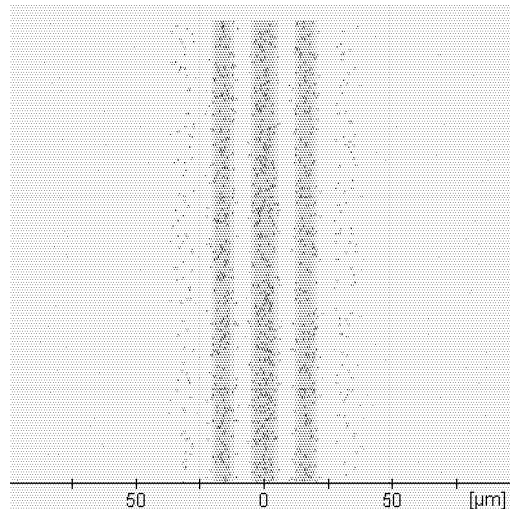


Abbildung 5.9: Wahrscheinlichkeitsverteilung (graue Schattierung) und nachgewiesene Elektronen (schwarze Punkte). Je dunkler die Schattierung, um so größer ist  $|\psi(x)|^2$ .

klassischen Wellengesetzen ausbreitet. In Analogie zur Wellenoptik bildet sich eine Beugungsfigur. Abb. 5.9 zeigt ihren Verlauf als graue Schattierung.

Dagegen gibt  $|\psi(x)|^2 \cdot \Delta V$  die Wahrscheinlichkeit an, ein Elektron an einem bestimmten Ort, also teilchenhaft nachzuweisen. Beim Nachweis verhält sich ein Elektron teilchenhaft, d. h. es hinterlässt einen genau lokalisierten Fleck auf dem Schirm (schwarze Punkte in Abb. 5.9).

Damit erklärt die Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation mit ihrer Verbindung von wellenhafter Ausbreitung und teilchenhaftem Nachweis das Ergebnis des Doppelspaltexperiments: Den Aufbau des Interferenzmusters aus einzelnen Flecken. Der naive Welle-Teilchen-Dualismus ist damit überwunden.

**Der naive Welle-Teilchen-Dualismus wird durch die Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation aufgelöst. Das wellenhafte Verhalten der Wellenfunktion und das teilchenhafte Verhalten beim Nachweis der Quantenobjekte erfassen die beiden scheinbar gegensätzlichen Züge in einem einheitlichen Bild.**

## 5.6 Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Doppelspalt-Experiment

Machen wir uns nun anhand des Doppelspaltexperiments klar, welche Konsequenzen die wellenmäßige Ausbreitung von  $\psi(x)$  zusammen mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $|\psi(x)|^2$  hat. Betrachten wir noch einmal das Experiment 5.6, bei dem nur Spalt 1 geöffnet ist (Abb. 5.8 (b)). Man ordnet diesen Atomen eine Wellenfunktion  $\psi_1(x)$  zu, die sich wie eine Wasserwelle halbkreisförmig hinter Spalt 1 ausbreitet (Abb. 5.10 (a)). Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron auf dem Schirm an der Stelle  $x$  zu finden, ist durch  $P_1(x) = |\psi_1(x)|^2$  gegeben. Sie ist hinter Spalt 1 am größten.

Das Ensemble von Elektronen, auf das sich die Wellenfunktion  $\psi_1(x)$  bezieht, besteht aus einer Menge von einzelnen Elektronen, die alle dem gleichen Präparationsverfahren unterzogen wurden, indem sie Spalt 1 durchquert haben. Jedes dieser Elektron wird an einem anderen Ort auf dem Schirm nachgewie-

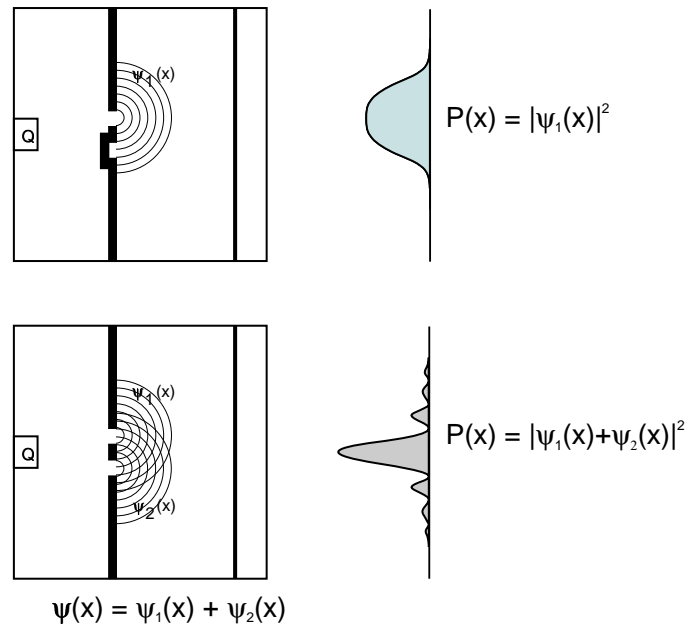


Abbildung 5.10: Wellenfunktion beim Doppelspalt-Experiment

sen, wobei es einen teilchenhaften Fleck hinterlässt. Die Verteilung, die sich auf dem Schirm nach dem Nachweis von sehr vielen Elektronen ergibt, ist ein Abbild der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P_1(x)$ .

Wie in Experiment 5.6 kann man nun Spalt 1 verschließen und dafür Spalt 2 öffnen. Die Wellenfunktion  $\psi_2(x)$  ist dann eine Welle, die von Spalt 2 ausgeht. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist durch  $P_2(x) = |\psi_2(x)|^2$  gegeben. Nimmt man die beiden Verteilungen der getrennt durchgeführten Experimente zusammen, erhält man die Gesamtverteilung

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x), \quad (5.13)$$

wie in Gleichung (5.10).

Anders sieht die Situation aus, wenn im Doppelspaltexperiment beide Spalte geöffnet sind. Jetzt geht von beiden Spalten eine Welle aus: von Spalt 1 die Wellenfunktion  $\psi_1(x)$ , von Spalt 2 die Wellenfunktion  $\psi_2(x)$  (Abb. 5.10 (b)). Nach der klassischen Wellentheorie *überlagern* sich die beiden Wellen, wie man es z. B. auf der Oberfläche eines Sees beobachten kann, wenn man zwei Steine nicht allzuweit entfernt voneinander ins Wasser wirft. Mathematisch wird dies durch die Addition beider Wellenfunktionen zum Ausdruck gebracht:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x). \quad (5.14)$$

Man sagt, dass die Elektronen, die durch eine solche Wellenfunktion beschrieben werden, sich in einem **Überlagerungszustand** aus  $\psi_1(x)$  und  $\psi_2(x)$  befinden.

Nun kommt der entscheidende Punkt: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(x)$  erhält man aus der Wellenfunktion (5.14) durch Quadrieren:  $P(x) = |\psi(x)|^2$ . Setzt man die Wellenfunktion (5.14) ein, ergibt sich der folgende Ausdruck<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} P(x) &= |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 \\ &= |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2\psi_1(x)\psi_2(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

<sup>2</sup>Hier wird angenommen, dass die Wellenfunktion reell ist. Hat man komplexe Zahlen eingeführt, lautet der Ausdruck:  $P(x) = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + \psi_1(x)\psi_2^*(x) + \psi_1^*(x)\psi_2(x)$ .

In der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(x)$  tritt zu den beiden Einzelspalt-Verteilungsfunktionen  $|\psi_1(x)|^2 = P_1(x)$  und  $|\psi_2(x)|^2 = P_2(x)$  noch ein *zusätzlicher Term* hinzu, den man *Interferenzterm* nennt. Er ergibt sich beim Ausmultiplizieren, weil die Wellenfunktion aus einer *Summe* zweier Terme besteht. Er ist deshalb charakteristisch für einen Überlagerungszustand wie (5.14).

Man kann die letzte Gleichung auch folgendermaßen schreiben

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + 2\psi_1(x)\psi_2. \quad (5.16)$$

Man kann so *erklären*, warum man beim Doppelspaltexperiment mit zwei geöffneten Spalten eine Verteilung der Elektronen findet, für die gilt (vgl. 5.11):

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x), \quad (5.17)$$

für die man also nicht einfach die beiden Einzelspaltverteilungen  $P_1(x)$  und  $P_2(x)$  addieren kann. Der Vergleich mit (5.16) macht es deutlich: Der Interferenzterm, der sich beim Ausmultiplizieren ergeben hat, ist dafür verantwortlich, dass in (5.17) kein Gleichheitszeichen steht.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (5.15) beschreibt das beim Doppelspaltexperiment beobachtete Interferenzmuster (Abb. 5.3 und 6.4 (b)). Da wir die explizite mathematische Form der Wellenfunktion an dieser Stelle noch nicht kennen, können wir zwar noch nicht bestätigen, dass die genaue Form der Verteilung tatsächlich korrekt wiedergegeben wird. Wir können aber an der *Struktur* der Gleichung und ihrer Interpretation ablesen, dass das Problem des naiven Welle-Teilchen-Dualismus, dass das Verständnis der Quantenphänomene so erschwert, überwunden ist.

Um dies noch einmal zu verdeutlichen, vollziehen wir noch einmal im Detail den Ablauf des Doppelspaltexperiments nach: Das Ensemble von sehr vielen Elektronen, die die Versuchsanordnung einzeln durchlaufen, wird durch die Wellenfunktion  $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$  beschrieben. Durch Quadrieren der Wellenfunktion erhält man die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(x)$ , die die für einen Überlagerungszustand charakteristischen Interferenzterme enthält. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wiederum bestimmt die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Elektron, an einer bestimmten Stelle auf dem Schirm gefunden zu werden. Dabei wird es als *Teilchen* nachgewiesen. Sehr viele Elektronen, die auf dem Schirm nachgewiesen werden, hinterlassen dort eine Verteilung auf dem Schirm, die die *Wellenstruktur* der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(x)$  widerspiegelt.